Los teoremas fundamentales del cálculo para la integral de Lebesgue

Noelia Serrano Fernández
Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directores del trabajo: Julio Bernués y Mario Pérez
27 de junio de 2019

Abstract.

0.1. Introduction.

First, this research will introduce some results of mathematical analysis, general topology and integration theory, saw in their great majority throughout the degree. Unless otherwise stated , we will take all functions with real values, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

It is said that f is integrable Riemann in $[a,b]$ if the limit of the Cauchy sums exists and is unique; it is denoted as

$$\operatorname*{lím}_{|P|\to 0} S(P;f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

where P is a partition of $[a,b]$.

This study gives a necessary and sufficient condition for a function f to be integrable Riemann, with the help of the Darboux integrals.

The class of the Riemann integrable functions is small. For this reason, in this section will talk about a new class of functions, called integrable Lebesgue functions.

We will introduce the concept of *measure* and we will talk especially about sets of measure zero, since they will be useful in later chapters.

To finish with preliminaries, we will present the Riemann integral (already known) and the possible deficiencies it has when applied to an integrable Lebesgue function. These insufficiencies in the Riemann integral are the incetivation that led us to carry out this study on the Fundamental Theorems of Calculus for the Lebesgue integral.

0.2. Differentiability of monotone functions.

We introduce the concept of *Dini derivatives* that generalizes the concept of derivative. Thanks to this new definition we can characterize, in a simple way, a derivable function.

It will continue talking about monotone functions and discuss some of its most interesting properties. Also, we will define a new concept, *shadow point*, which will be key to proof one of the lemmas of the section, the so-called *the rising sun lemma*.

Seen all the above, we will conclude the section with the demonstration of the main theorem of the chapter and a key result to achieve the purpose of our work.

Theorem 0.1. *Every monotone function f in $[a,b]$ is differentiable almost everywhere on $[a,b]$.*

0.3. Functions of bounded variation and absolutely continuous functions.

The class of monotone functions is still small, in fact, the difference of two monotonous functions is not necessarily another monotone function. This is where the concept of *bounded variation* appears:

Definition. A function f is said to be of bounded variation if there is a constant $C > 0$ such that the inequality $\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq C$ holds for any partition $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

We can characterize these functions through *Jordan descomposition theorem*, main theorem of the chapter:

Theorem 0.2. *Every function of bounded variation on $[a,b]$ is the difference of two monotone increasing functions on $[a,b]$.*

Essential result to expose Lebesgue theorem by the following statement:

Corollary 0.3. *Every function of bounded variation is differentiable almost everywhere.*

But this generalization will generate questions about whether the derivative of the function is integrable or not, questions that we will try to answer through later propositions and lemmas.

We will end the chapter with a new class of functions, called *absolutely continuous functions*, that will clarify the relation between differentation and integration in the sense of Lebesgue.

0.4. The fundamental theorem of calculus.

In this last chapter we will conclude our analysis on integration and differentiation in the sense of Lebesgue, enunciating and finally demonstrating the fundamental theorems of calculus.

Theorem 0.4. ***(First fundamental theorem of calculus for Lebesgue integral.)*** *If f is integrable on $[a,b]$, then the integral*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{1}$$

is absolutely continuous on $[a,b]$ and $F'(x) = f(x)$ a.e. on $[a,b]$.

Theorem 0.5. ***(Second fundamental theorem of calculus for Lebesgue integral.)*** *If f is absolutely continuous on $[a,b]$, then f' is integrable on $[a,b]$ and*

$$\int_a^x f(t)\,dt = f(x) - f(a), \text{ for all } x \in [a,b].$$

We will enunciate corollaries and propositions derived from these theorems, also known in measure theory and integration.

Finally, we will show one useful application of these theorems.

Proposition 0.6. ***(Integration by parts.)*** *Suppose F is absolutely continuous and g is integrable on $[a,b]$. Define $f(x) = F'(x)$ a.e. on $[a,b]$ and let $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$. Then, Fg and fG are integrable on $[a,b]$ and*

$$\int_a^b F(t)g(t)\,dt + \int_a^b f(t)G(t)\,dt = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Índice general

Capítulo 1

Introducción.

Nuestro objetivo será demostrar el teorema fundamental del cálculo para funciones integrables en el sentido de Lebesgue. Comenzamos enunciando algunos resultados de análisis matemático, teoría de la integración y topología general, estudiados durante el grado en matemáticas. Son definiciones y teoremas ya conocidos que sirven de comienzo para dar la extensión de los teoremas fundamentales del cálculo a la integral de Lebesgue.

Los resultados de este capítulo se pueden ver en [1, pp. 119–130], [2] y [3, pp. 31–45, 51–66, 90].

A lo largo del capítulo, salvo que se especifique de otro modo, las funciones toman valores reales, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

1.1. Integral de Riemann.

Sea f una función acotada definida en un intervalo $[a,b]$, y P una partición del intervalo $[a,b]$,

$$P \equiv \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}.$$

Se define la suma de Cauchy como

$$S(P;f) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

donde $x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_j$.

La integral definida de la función f en $[a,b]$ se define como el límite de las sumas de Cauchy $S(P;f)$ cuando $|P| \to 0$, siendo $|P| = \sup\{x_j - x_{j-1} : 1 \leq j \leq n\}$. Si este límite existe (y es un número real), es único y lo denotaremos

$$\lim_{|P|\to 0} S(P;f) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En tal caso, diremos que f es integrable Riemann en $[a,b]$.

Con objetivo de dar una condición necesaria y suficiente para que una función f sea integrable Riemann necesitamos definir las integrales de Darboux.

Sea f una función acotada en $[a,b]$, asociamos con cualquier partición P de $[a,b]$, $P \equiv \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, las sumas superior e inferior de Darboux:

$$\overline{S}(P;f) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}), \quad M_j = \sup\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\},$$

$$\underline{S}(P;f) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}), \quad m_j = \inf\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\}.$$

Si la partición P es reemplazada por otra partición más fina P', es decir, $P \subset P'$, entonces

$$\underline{S}(P;f) \leq \underline{S}(P';f) \leq \overline{S}(P';f) \leq \overline{S}(P;f).$$

Definimos

$$\overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x = \inf \overline{S}(P;f), \tag{1.1}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x = \sup \underline{S}(P;f), \tag{1.2}$$

cuyos supremo e ínfimo están tomados sobre todas las particiones P del intervalo $[a,b]$. A estas integrales las denominamos las integrales superior (1.1) e inferior (1.2) de Darboux.

Con estas definiciones podemos caracterizar la integral de Riemann del siguiente modo:

Teorema 1.1. *La integral de Riemann $\int_a^b f(x)\ dx$ existe si y solo si $\overline{\int_a^b} f(x)\ dx = \underline{\int_a^b} f(x)\ dx$.*

La clase de todas las funciones integrables Riemann es algo pequeña. Esta integral tiene deficiencias que a menudo conducen a dificultades insuperables. De hecho, si $f_1, f_2, \dots$ son integrables Riemann en $[a,b]$ y $\lim_n f_n(x) = f(x)$ en todo $[a,b]$, no se cumple en general que

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x. \tag{1.3}$$

Pueden fallar tres cosas:

1. El límite de la izquierda de (1.3) puede no existir.
2. Existe el límite y puede que la función f no sea integrable; es decir, la integral de la derecha de (1.3) no tendría sentido.
3. Pueden existir ambos lados de la igualdad, pero no ser iguales.

Por ejemplo, sea la función de Dirichlet, $\mathscr{D} : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathscr{D}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{1.4}$$

En cualquier intervalo $[x_{j-1}, x_j]$, asociado a cualquier partición P del intervalo $[0,1]$, f toma los valores 0 y 1 debido a que los racionales y los irracionales son densos en los reales, por tanto $\overline{S}(P;f) = 1$ y $\underline{S}(P;f) = 0$. En consecuencia, $\overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x = 1$ y $\underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x = 0$. Así, por el teorema 1.1, la función de Dirichlet no es integrable Riemann.

1.2. Conjuntos de medida nula.

Una función acotada f, continua en todo punto, salvo en un número finito de discontinuidades, es integrable Riemann, pero, ¿qué ocurre con las funciones que son discontinuas en un número infinito de puntos? Para poder contestar a esta pregunta, introducimos el concepto de conjunto de medida nula.

Definición 1. Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ se denomina *conjunto de medida nula* (o se dice que A tiene medida nula) si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe una sucesión de intervalos abiertos acotados $I_1, I_2, \dots$ tal que:

(a) $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq \varepsilon$, donde $|I_n|$ es la longitud del intervalo I_n.

Proposición 1.2. *Propiedades de conjuntos de medida nula.*

(a) Cualquier conjunto contable (finito o infinito) tiene medida nula.

(b) Cualquier subconjunto de un conjunto de medida nula, tiene medida nula.

(c) Si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, con A_n conjuntos de medida nula, entonces A tiene medida nula.

Sabiendo esto, se puede decir que una sucesión de funciones (f_n) definida en $A \subseteq \mathbb{R}$ converge en casi todo punto (c.t.p.) a la función f si el conjunto $\{x \in A : \lim_n f_n(x) \neq f(x)\}$ tiene medida nula. Se escribe $f_n \to f$ en c.t.p.

Pero, ¿todo conjunto de medida nula es contable? Veamos que no es cierto con el siguiente contraejemplo:

El conjunto de Cantor. Este conjunto se obtiene de la siguiente manera. Se divide en tres partes el intervalo $C_0 = [0,1]$ y se suprime el intervalo central abierto; se obtiene el conjunto $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Repitiendo el proceso, se dividen en tres subintervalos los intervalos no suprimidos, y se vuelven a eliminar los intervalos abiertos centrales; se obtiene $C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$. Este proceso se reitera sucesivamente, y así, finalmente, el *conjunto de Cantor C* se define como la intersección de todos los conjuntos C_m. Es decir, $C = \cap_{m=0}^{\infty} C_m$.

Se puede probar que

$$C = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{3^k} : \varepsilon_k = 0 \text{ o } 2 \right\}.$$

Veamos los primeros pasos de este proceso:

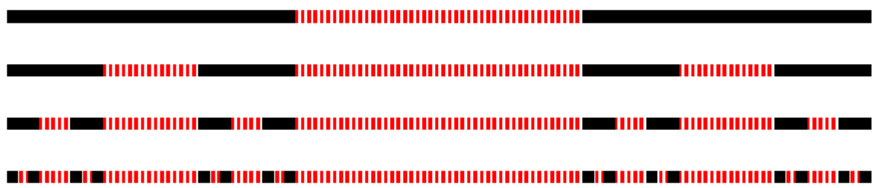

Figura 1.1: Cuatro iteraciones del proceso de construcción del conjunto de Cantor.

Este conjunto C es un compacto no contable de interior vacío y de medida nula.

A lo largo del trabajo se volverá a nombrar para construir unas funciones bastante interesantes y útiles para la comprensión de algún resultado posterior.

1.3. Integral de Lebesgue.

Vamos a introducir algún concepto básico para el posterior análisis de la integral de Lebesgue.

Dado un conjunto E, se define su función característica $\chi_E(x)$ como

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in E, \\ 0 \text{ si } x \notin E. \end{cases}$$

Definición 2. Una función $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ se denomina *función simple* si se puede representar como una combinación lineal de funciones características de intervalos abiertos disjuntos.

Se denomina *representación estándar* o *forma canónica* de s a

$$s(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{I_k}(x),$$

donde $I_k = (x_{k-1}, x_k)$ para $1 \leq k \leq n$ y $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Definición 3. La integral de una función simple se define

$$\int_a^b s(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} a_k(x_k - x_{k-1}).$$

Definición 4. Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ *pertenece a la clase* L^+ si existe una sucesión mónotona creciente (f_n) de funciones simples definida en $[a,b]$ tal que:

1. la sucesión $(\int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x)$ es acotada,

2. $f(x) = \text{lím}_n f_n(x)$ c.t.p. $[a,b]$.

Definición 5. Si $f \in L^+$, definimos la *integral de Lebesgue de* f mediante el límite

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_n \int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x,$$

donde $(f_n(x))$ es una sucesión monótona de funciones simples verificando las condiciones de la definición 4.

Proposición 1.3. *Toda función no negativa integrable Riemann en* $[a,b]$ *pertenece a la clase* L^+ *y su integral de Riemann coincide con la integral de Lebesgue para la clase* L^+.

Se precisa completar la construcción de la clase L^+, ya que, si tenemos dos funciones f, $g \in L^+$, su diferencia $f - g$ no necesariamente pertenecerá a esta clase.

Definición 6. Denotaremos como L a la clase de funciones que son diferencia de dos funciones de la clase L^+. Esto es, si f y g son funciones que pertenecen a la clase L^+, entonces su diferencia $f - g$ es un elemento de L. A esta clase de funciones la denominaremos como la clase de las *funciones integrables Lebesgue*.

En esta clase de funciones, también se necesita definir su integral.

Definición 7. Sea $f \in L$ tal que $f = f_1 - f_2$ con f_1, $f_2 \in L^+$. La integral de f se define de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b f_2(x)\ \mathrm{d}x.$$

Esta integral se denomina *integral de Lebesgue* de f.

Es fácil probar que esta definición es única, aunque la descomposición $f = f_1 - f_2$ no lo es.

En lo sucesivo, diremos *integrable* en lugar de *integrable Lebesgue*. Si puede dar lugar a confusión, se dirá explícitamente.

Proposición 1.4. *Sea* $f \in L$*, entonces existe una sucesión* (f_n) *de funciones simples en* $[a,b]$ *tal que* $f_n \to f$ *en c.t.p. de* $[a,b]$ *y*

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx.$$

1.4. Medida de Lebesgue.

Definición 8. Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ se dice *medible* si se puede representar en casi todo punto por el límite de una sucesión (f_n) de funciones simples que converge c.t.p. de $[a,b]$.

Proposición 1.5. *Toda función continua en* $[a,b]$ *es medible.*

Definición 9. Un conjunto E contenido en el intervalo cerrado $[a,b]$ se dice *medible* (o *medible Lebesgue*) si su función característica χ_E es medible. La medida $m(E)$ de este conjunto se define como

$$m(E) = \int_a^b \chi_E(x)\ \mathrm{d}x.$$

Esta medida $m(E)$ es independiente de la elección de los intervalos que contienen a E.

1.5. Motivaciones.

Si f es integrable Riemann en $[a,b]$, llamamos a la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t,\ \ x \in [a,b],$$

integral de f (en sentido Riemann).

Hasta ahora, podemos presentar dos teoremas conocidos (en sentido Riemann). Podemos decir que derivabilidad e integración de Riemann son operaciones inversas, en el siguiente sentido:

- *Teorema fundamental del cálculo integral.* Si f es integrable Riemann en $[a,b]$ y $F(x)$ su integral. Entonces:

  (a) $F(x)$ es continua en $[a,b]$,

  (b) si f es continua en algún $\xi \in [a,b]$, entonces F es derivable en ξ y

  $$F'(\xi) = f(\xi). \tag{1.5}$$

- *Regla de Barrow.* Sea f integrable Riemann en $[a,b]$ y supongamos que existe una función derivable F en $[a,b]$ tal que $F' = f$, entonces

  $$\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = F(x) - F(a). \tag{1.6}$$

Vamos a escribir la condición del teorema 1.1 de una forma más compacta en términos de conjuntos de medida nula. La definición dada por Riemann impone que el conjunto de puntos donde la función es discontinua debe ser de medida nula.

Inspirado en esa definición, Lebesgue fue capaz de mostrar que esa condición es una caracterización de funciones integrables Riemann.

Teorema 1.6. *Una función acotada f definida en [a,b] es integrable Riemann si y solo si es continua en casi todo punto.*

Nuestro propósito a lo largo del trabajo es investigar la relación entre derivabilidad e integración para funciones integrables en el sentido de Lebesgue, de la forma más precisa posible. En los sucesivos capítulos, caracterizaremos tipos de funciones que satisfagan los teoremas fundamentales del cálculo para la integral de Lebesgue.

- Se demostrará que para una función f integrable Lebesgue, la relación $F'(x) = f(x)$ se cumple en c.t.p. de $[a,b]$, siendo $F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$. Esto establece que la derivabilidad es la operación inversa de la integración en el sentido de Lebesgue.

- También, se demostrará que para una nueva clase de funciones, denominadas *absolutamente continuas* cuyas derivadas son integrables en $[a,b]$, se cumple la igualdad

  $$\int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t = f(x) - f(a),\ \text{ para todo } x \in [a,b].$$

Capítulo 2

Derivación de funciones monótonas.

Nuestra finalidad en este capítulo será concluir que *toda función monótona en [a,b] es derivable en casi todo punto*. Para ello, vamos a introducir nuevos conceptos de derivabilidad, probaremos lemas útiles que nos acercarán a la conclusión y demostraremos un importante teorema que será la base de nuestra demostración final.

Los resultados de este capítulo se pueden ver en [3, pp. 160–171].

2.1. Derivadas de Dini.

Definición 10. Una función f, definida en $[a,b]$, es *derivable* en $[a,b]$ si el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\quad a\le x\le b,$$

existe y pertenece a $\mathbb{R}$. Dicho límite se denomina *derivada de f en x* y se denota como $f'(x)$.

Una función f que tiene derivada en x_0, es continua en x_0. Sin embargo, el recíproco no es cierto. Por ejemplo, la función $f(x)=|x|$ es continua en todo su dominio, en particular en $x=0$, pero no es derivable en $x=0$.

De hecho, podemos decir más:

Proposición 2.1. *Existe una función continua que no es derivable en ninguna parte.*

Un ejemplo de esta proposición es la función de Weierstrass:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \text{dada por } f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x),$$

donde $0<a<1$, b es un entero impar y positivo y de manera que $ab>1+\frac{3}{2}\pi$.

Vamos a extender el concepto de derivada para asegurarnos de que los límites existen.

Definición 11. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Definimos las cuatro *derivadas de Dini* de f en x como:

$$D^+f(x)=\overline{\lim_{h\searrow 0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\ \text{derivada superior de Dini por la derecha.}\tag{2.1}$$

$$D_+f(x)=\underline{\lim_{h\searrow 0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\ \text{derivada inferior de Dini por la derecha.}\tag{2.2}$$

$$D^-f(x)=\overline{\lim_{h\nearrow 0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\ \text{derivada superior de Dini por la izquierda.}\tag{2.3}$$

$$D_-f(x) = \lim_{h\nearrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \text{ derivada inferior de Dini por la izquierda.} \tag{2.4}$$

Proposición 2.2. *Las derivadas de Dini siempre existen (tomando un valor real, ∞ o $-\infty$) para cualquier función f y*

$$D^+f(x) \geq D_+f(x) \quad y \quad D^-f(x) \geq D_-f(x).$$

Demostración. Las desigualdades se tienen de las propiedades de límites superior e inferior. □

Proposición 2.3. *Una función f es derivable en x si y solo si las cuatro derivadas de Dini son idénticas y distintas de $\pm\infty$.*

2.2. Funciones monótonas.

Definición 12. Funciones monótonas.

- Una función f se dice *monótona creciente* si para $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Una función f se dice *monótona decreciente* si para $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- Una función f se dice *monótona* si es monótona creciente o monótona decreciente.

Enunciamos algunas propiedades de este tipo de funciones que serán de utilidad para las sucesivas demostraciones de teoremas.

- Sea f monótona en $[a,b]$. Entonces el conjunto de puntos de $[a,b]$ en los que f es discontinua es, a lo sumo, contable.
- Sea f monótona en $[a,b]$. Sea $g(x) = -f(-x)$. Entonces, g es monótona en $[-b,-a]$. Además,

  $$D_-g(-x) = D_+f(x) \text{ y } D^+g(-x) = D^-f(x). \tag{2.5}$$

  Demostración. Tenemos $f(x) = -g(-x)$.

  Veamos la demostración de la primera igualdad:

  $$\begin{aligned} D_+f(x) &= \lim_{h\searrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\searrow 0} \frac{-g(-(x+h))-(-g(-x))}{h} \\ &= \lim_{h\searrow 0} -\frac{g(-(x+h))-g(-x)}{h} = \lim_{h\nearrow 0} \frac{g(-x+h)-g(-x)}{h} \\ &= D_-g(-x). \end{aligned}$$

  Para la segunda igualdad, seguir un procedimiento análogo.

  □

Hasta ahora en esta sección, únicamente hemos recordado tipos de funciones ya estudiados durante el grado.

Continuamos con una nueva definición muy necesaria a lo largo de todo el trabajo.

Definición 13. Sea f continua en $[a,b]$. Un punto $x_0 \in [a,b]$ se dice *punto sombra de f con respecto a la salida del sol* si existe un punto $\xi \in [a,b]$ tal que $\xi > x_0$ y $f(\xi) > f(x_0)$.

A continuación se muestra la gráfica de una función que nos enseña un pequeño ejemplo de manera visual de qué es un *punto sombra*. En este ejemplo, los puntos sombra son los puntos pertenecientes a los intervalos (a_k, b_k) con $k = 1, 2, 3$.

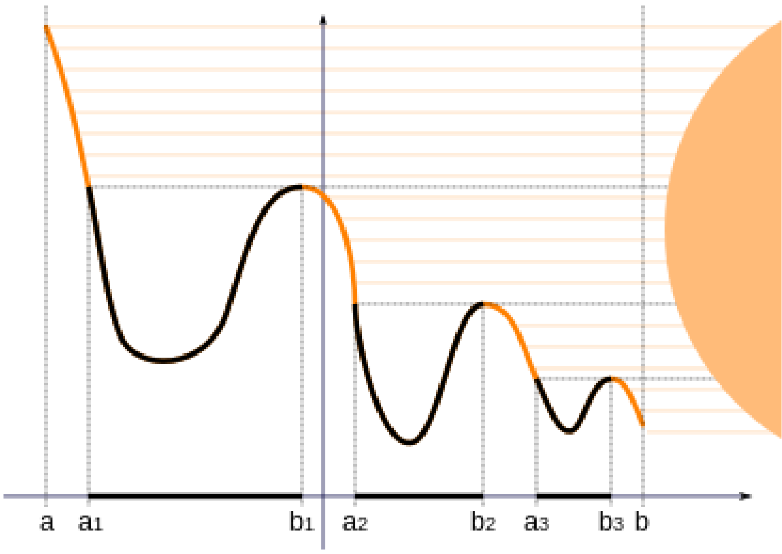

Figura 2.1: Función continua y sus puntos sombra con respecto a la salida del sol.

En la figura 2.1 se puede observar que el conjunto de todos los puntos sombra de (a,b) es un abierto que es unión de intervalos abiertos (a_k, b_k) disjuntos dos a dos.

Podemos resumir este argumento en el siguiente lema:

Lema 2.4. ***(Lema del sol naciente.)*** *Sea f una función continua en $[a,b]$. Entonces, el conjunto E de todos los puntos sombra de f en (a,b) con respecto a la salida del sol es un abierto, que es la unión de intervalos abiertos (a_k, b_k) disjuntos dos a dos tales que $f(a_k) \leq f(b_k)$ para todo k.*

Para la demostración de este lema, es necesario tener conocimiento de un teorema estudiado en topología general:

Teorema 2.5. *Todo conjunto abierto de números reales es la unión de una colección contable de intervalos abiertos mutuamente disjuntos.*

Demostración del lema 2.4. Sea E el conjunto de todos los puntos sombra de f en (a,b) con respecto a la salida del sol.

- Veamos que E es un conjunto abierto:

  Sea $x_0 \in E$, luego x_0 es un punto sombra, que por definición cumple que existe $\xi > x_0$ tal que $f(\xi) > f(x_0)$. Como f es continua en $[a,b]$, en particular, es continua en x_0, luego podemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, entonces $f(x) < f(\xi)$ y $x < \xi$, por tanto, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq E$.

  Así, E es abierto, y por el teorema anterior, E es unión contable de intervalos abiertos (a_k, b_k) disjuntos dos a dos.

- Veamos ahora que, para estos intervalos, tenemos que $f(a_k) \leq f(b_k)$ para todo k:

Sea un punto cualquiera $x \in (a_k, b_k)$ (x es un punto sombra) y definimos el conjunto $A = \{y \in [x, b_k] : f(y) \geq f(x)\}$. Ya que $A \subseteq [a,b]$ y f es continua, tenemos que A es cerrado y acotado; y, como $x \in A$, A es no vacío. Sea $t = \text{máx} A$. Queremos ver que $t = b_k$. Supongamos que $t < b_k$.

Tenemos $t \in (a_k, b_k)$, es decir, es un punto sombra. Por tanto, existe $\xi > t$ tal que $f(\xi) > f(t)$.

Pero, por la definición de A, para todo $y \in (t, b_k]$ deberá ser $f(y) < f(x) \leq f(t)$. Así que, $\xi > b_k$ y $f(\xi) > f(b_k)$, luego b_k es un punto sombra, lo que nos lleva a contradicción. Por tanto, $t = b_k$. Así tenemos que $f(x) \leq f(b_k)$ para todo $x \in (a_k, b_k)$; como f es continua, en particular, f es continua en a_k, por tanto, $f(x) \xrightarrow{x \to a_k} f(a_k)$. Y así, $f(a_k) \leq f(b_k)$ para todo k. □

Análogo a la definición 13 y al lema 2.4 tenemos:

Definición 14. Sea f continua en $[a,b]$. Un punto $x_0 \in [a,b]$ se dice *punto sombra de f con respecto a la puesta del sol* si existe un punto $\xi \in [a,b]$ tal que $\xi < x_0$ y $f(\xi) > f(x_0)$.

Lema 2.6. ***(Lema del sol poniente.)*** *Sea f una función continua en $[a,b]$. Entonces, el conjunto E de todos los puntos sombra de f en (a,b) con respecto a la puesta del sol es un abierto, que es la unión de intervalos abiertos (a_k, b_k) disjuntos dos a dos tales que $f(a_k) \geq f(b_k)$ para todo k.*

En la siguiente secuencia de lemas, se supondrá que f es continua y monótona creciente en $[a,b]$.

Lema 2.7. *Para cualquier número real $r > 0$ y cualquier intervalo abierto $(\alpha, \beta) \subseteq (a,b)$, el conjunto*

$$E^r = \{x \in (\alpha, \beta) : D^+ f(x) > r\}$$

puede ser cubierto por una sucesión de intervalos abiertos disjuntos de longitud total

$$\leq \frac{1}{r}[f(\beta) - f(\alpha)].$$

Demostración. Sea $x_0 \in (\alpha, \beta)$ tal que $D^+ f(x_0) > r$. Entonces, existe $\xi > x_0$ tal que $\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} > r$.
Por tanto, $f(\xi) - r\xi > f(x_0) - rx_0$. Así tenemos que x_0 es un punto sombra de la función $f(x) - rx$ con respecto a la salida del sol, entonces, por el lema 2.4, E^r está contenido en la unión de una sucesión de intervalos abiertos disjuntos $(a_k, b_k) \subseteq (\alpha, \beta)$ para los cuales $f(a_k) - ra_k \leq f(b_k) - rb_k$.
Así, $b_k - a_k \leq \frac{1}{r}[f(b_k) - f(a_k)]$. Por tanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) \leq \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} [f(b_k) - f(a_k)] \leq \frac{1}{r}(f(\beta) - f(\alpha)).$$ □

Lema 2.8. *Para cualquier número real $r > 0$ y para un intervalo abierto $(\alpha, \beta) \subseteq (a,b)$, el conjunto*

$$E_r = \{x \in (\alpha, \beta) : D_- f(x) < r\}$$

se puede cubrir por una sucesión de intervalos abiertos disjuntos $(\alpha_k, \beta_k) \subset (\alpha, \beta)$ tal que

$$f(\beta_k) - f(\alpha_k) \leq r(\beta_k - \alpha_k).$$

Demostración. Sea $x_0 \in E_r$. Entonces, $D_- f(x_0) < r$ y así existe $\xi < x_0$ tal que $\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} < r$.
Por tanto, $f(\xi) - r\xi > f(x_0) - rx_0$. Así tenemos que x_0 es un punto sombra de la función $f(x) - rx$ con respecto a la puesta del sol, entonces, por el lema 2.6, E_r está contenido en la unión de una sucesión de intervalos abiertos disjuntos $(\alpha_k, \beta_k) \subseteq (\alpha, \beta)$ tal que $f(\alpha_k) - r\alpha_k \geq f(\beta_k) - r\beta_k$. Así,

$$f(\beta_k) - f(\alpha_k) \leq r\,\beta_k - r\,\alpha_k = r\,(\beta_k - \alpha_k).$$ □

Combinando los dos lemas anteriores:

Lema 2.9. *Sea $0 < r < R < \infty$. Entonces, para cualquier intervalo abierto $(\alpha,\beta) \subseteq (a,b)$, el conjunto*

$$E_r^R = \{x \in (\alpha,\beta) : D_- f(x) < r < R < D^+ f(x)\}$$

puede cubrirse por una sucesión de intervalos abiertos disjuntos de longitud total

$$\leq \frac{r}{R}(\beta - \alpha).$$

Demostración. Sean los conjuntos $E^R = \{x \in (\alpha,\beta) : D^+ f(x) > R\}$ y $E_r = \{x \in (\alpha,\beta) : D_- f(x) < r\}$. Tenemos $E_r^R = E_r \cap E^R$. Por el lema 2.8, E_r^R está cubierto por una sucesión de intervalos abiertos (α_k, β_k) que satisfacen

$$f(\beta_k) - f(\alpha_k) \leq r(\beta_k - \alpha_k). \tag{2.6}$$

Para cada k consideramos $E_r^R \cap (\alpha_k, \beta_k)$. Por tanto, $E_r^R \cap (\alpha_k, \beta_k) \subset \{x \in (\alpha_k, \beta_k) : D^+ f(x) > R\}$. Así, por el lema 2.7, $E_r^R \cap (\alpha_k, \beta_k)$ se puede cubrir por una sucesión de intervalos abiertos disjuntos de longitud total

$$\leq \frac{1}{R}(f(\beta_k) - f(\alpha_k)).$$

Por tanto, E_r^R se puede cubrir por una sucesión de intervalos abiertos disjuntos de longitud total

$$\leq \frac{1}{R}\sum_{k=1}^{\infty}(f(\beta_k) - f(\alpha_k)). \tag{2.7}$$

Uniendo las desigualdades (2.6) y (2.7), tenemos:

$$\frac{1}{R}\sum_{k=1}^{\infty}(f(\beta_k) - f(\alpha_k)) \leq \frac{1}{R}\sum_{k=1}^{\infty} r(\beta_k - \alpha_k) = \frac{r}{R}\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k - \alpha_k) \leq \frac{r}{R}(\beta - \alpha).$$

Así, el conjunto E_r^R puede cubrirse por una sucesión de intervalos abiertos disjuntos de longitud total

$$\leq \frac{r}{R}(\beta - \alpha). \qquad \square$$

Sabiendo esto, estamos en disposición de enunciar y demostrar el teorema de Lebesgue para funciones monótonas.

Teorema 2.10. ***(Lebesgue.)*** *Toda función monótona y continua f en $[a,b]$ es derivable en casi todo punto de $[a,b]$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos considerar que f es continua y monótona creciente (si f fuera monótona decreciente, basta tomar $-f$ en la demostración).

Por la proposición 2.3, para que f sea derivable tiene que tener las cuatro derivadas de Dini idénticas y distintas de $\pm\infty$.
Veamos que, en casi todo punto,

$$0 \leq D^+ f(x) \leq D_- f(x) \leq D^- f(x) \leq D_+ f(x) \leq D^+ f(x) < \infty.$$

Sabemos por la proposición 2.2 que $D_+ f(x) \leq D^+ f(x)$ y $D_- f(x) \leq D^- f(x)$.
Así, nos basta con probar que, en casi todo punto,

1. $0 \leq D^+ f(x) < \infty$,
2. $D^+ f(x) \leq D_- f(x)$ y
3. $D^- f(x) \leq D_+ f(x)$.

Veamos que la tercera desigualdad se deduce de la segunda.

Consideramos la función $g(x) = -f(-x)$, que es una función monótona creciente en $[-b,-a]$. Por (2.5), tenemos que $D^+g(-x) = D^-f(x)$ y $D_-g(-x) = D_+f(x)$. Si aplicamos $D^+f(x) \leq D_-f(x)$ a la función $g(x)$:

$$D^-f(x) = D^+g(-x) \leq D_-g(-x) = D_+f(x).$$

Por tanto, es suficiente probar que $0 \leq D^+f(x) < \infty$ y $D^+f(x) \leq D_-f(x)$ se cumplen para casi todo $x \in [a,b]$.

- Comenzamos probando que $D^+f(x) \leq D_-f(x)$ en casi todo punto:

  Basta ver que el conjunto $E_r^R = \{x \in (a,b) : D_-f(x) < r < R < D^+f(x)\}$ tiene medida nula. Por el lema 2.9, E_r^R se puede cubrir por una sucesión de intervalos abiertos disjuntos $(a_k,b_k) \subset (a,b)$ tal que

  $$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) \leq \frac{r}{R}(b-a). \tag{2.8}$$

  Aplicamos de nuevo el lema a cada $E_r^R \cap (a_k,b_k)$, podemos afirmar que el conjunto $E_r^R \cap (a_k,b_k)$ se puede cubrir por una sucesión de intervalos disjuntos $(a_{k,n},b_{k,n})$ tal que

  $$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{k,n} - a_{k,n}) \leq \frac{r}{R}(b_k-a_k). \tag{2.9}$$

  De las desigualdades (2.8) y (2.9) tenemos:

  $$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(b_{k,n} - a_{k,n}) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{r}{R}(b_k-a_k) = \frac{r}{R}\sum_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k) \leq \frac{r}{R}\frac{r}{R}(b-a) = \left(\frac{r}{R}\right)^2(b-a).$$

  Por inducción, podemos concluir que E_r^R se puede cubrir por una sucesión de intervalos abiertos disjuntos cuya longitud total es $\leq \left(\frac{r}{R}\right)^n(b-a)$, siendo n un número natural.

  Como $0 < \frac{r}{R} < 1$, $\left(\frac{r}{R}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Por tanto, E_r^R tiene medida nula. Y ahora, dado que la unión contable de conjuntos de medida nula también es de medida nula, el conjunto

  $$\cup E_r^R = \{x \in (a,b) : D_-f(x) < D^+f(x)\},$$

  donde la unión incluye todos los racionales $0 < r < R$, también es de medida nula.

  Así concluimos que $D^+f(x) \leq D_-f(x)$ para c.t.p. $x \in [a,b]$.

- Veamos que $0 \leq D^+f(x) < \infty$ en casi todo punto.

  Comenzamos probando que el conjunto $E = \{x \in (a,b) : D^+f(x) = +\infty\}$ tiene medida nula. Sea $E^n = \{x \in (a,b) : D^+f(x) > n\}$. Tenemos que $E = \cap_{n=1}^{\infty}E^n$. Por el lema 2.7, E^n se puede cubrir por una sucesión de intervalos abiertos disjuntos de longitud total $\leq \frac{1}{n}(f(b)-f(a))$.

  Como $n \to \infty$, $\frac{1}{n}(f(b)-f(a)) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

  Por tanto, E tiene medida nula, y así, $D^+f(x) < \infty$.

  Como f es monótona creciente,

  $$D^+f(x) = \overline{\lim_{h\searrow 0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0.$$

  Así queda probado que $0 \leq D^+f(x) < \infty$ en casi todo punto.

Con todo lo anterior, concluimos que las cuatro derivadas de Dini son idénticas y distintas de $\pm\infty$, y por tanto, f es derivable en casi todo punto de $[a,b]$. □

Así, el teorema de Lebesgue 2.10 queda demostrado para funciones monótonas continuas.

Para una función f monótona general, vamos a dar una idea de la demostración, utilizando como ayuda su función inversa.

Idea de la demostración. Si f es estrictamente monótona, tenemos que g es continua, siendo g su función inversa.

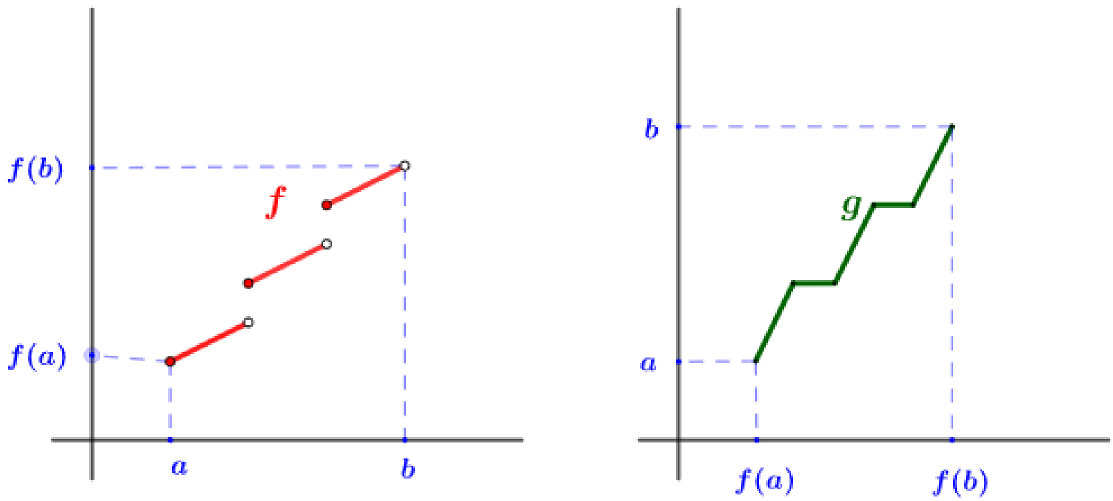

Figura 2.2: Gráficas de la función f monótona creciente y su función inversa g.

Es fácil probar que g es continua, luego es derivable en casi todo punto, y de ahí, aunque no es inmediato, se deduce que f lo es.

Por tanto, concluimos que *toda función monótona f en $[a,b]$, no necesariamente continua, es derivable en c.t.p. de $[a,b]$.*

Capítulo 3

Funciones de variación acotada y funciones absolutamente continuas.

Queremos extender la clase de funciones del capítulo anterior a una clase mayor, es decir, relacionar las funciones monótonas entre sí para obtener una clase de funciones que cumplirán mejores propiedades. También, hablaremos de otro tipo de funciones que necesitamos para el objetivo final del trabajo.

Los resultados de este capítulo se pueden ver en [3, pp. 171–183] y en [2, pp. 13–15].

3.1. Funciones de variación acotada.

Vamos a extender la clase de funciones monótonas a una clase de funciones mayor, llamada *funciones de variación acotada*.

Definición 15. Una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se dice que es de *variación acotada* si existe una constante $C>0$ tal que la desigualdad $\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\leq C$ se cumple para cualquier partición $P\equiv\{a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b\}$.

En este caso, definimos la *variación total* de f, $V_a^b(f,P)$, en $[a,b]$ como

$$V_a^b(f,P)=\sup\{\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|: a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b\},$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones del intervalo $[a,b]$.

En lo sucesivo, escribiremos $V_a^b(f)$ en lugar de $V_a^b(f,P)$; si puede dar lugar a error, se dirá explícitamente.

Algunas propiedades a tener en cuenta son:

- Si f es una función monótona en $[a,b]$, entonces f es de variación acotada y $V_a^b(f)=|f(b)-f(a)|$.

  Demostración. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monótona creciente.
  Para cualquier partición $P\equiv\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ de $[a,b]$, se tiene $f(x_k)-f(x_{k-1})\geq 0$, $k=1,2,\ldots$. Luego:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)-f(x_{k-1})\\ &= f(x_1)-f(x_0)+f(x_2)-f(x_1)+\cdots+f(x_n)-f(x_{n-1})\\ &= f(x_n)-f(x_0)=f(b)-f(a).\end{aligned}$$

Siguiendo el mismo procedimiento para una función monótona decreciente tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = f(a) - f(b).$$

Por tanto, para una función monótona, $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$. □

- Si f es de variación acotada en $[a,b]$, entonces f es acotada en $[a,b]$.

Demostración. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada. En particular, es de variación acotada para la partición $P \equiv \{a,x,b\}$ con $x \in (a,b)$. Entonces, $|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq C$; y como $|f(b) - f(x)| \geq 0$, tenemos que $|f(x) - f(a)| \leq C$.
Por la desigualdad triangular, $|f(x)| = \big|f(x) - f(a) + f(a)\big| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq C + |f(a)|$.
Luego, f está acotada en $[a,b]$, con cota $C + |f(a)|$. □

Un función continua no tiene por qué ser de variación acotada. Por ejemplo, sea la función

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \text{ dada por } f(x) = \begin{cases} x\cos(\frac{1}{x}) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Es una función continua cuya variación es ∞.
Este ejemplo también sirve para ver que el recíproco de la propiedad anterior no es cierto, pues es una función acotada que no es de variación acotada.

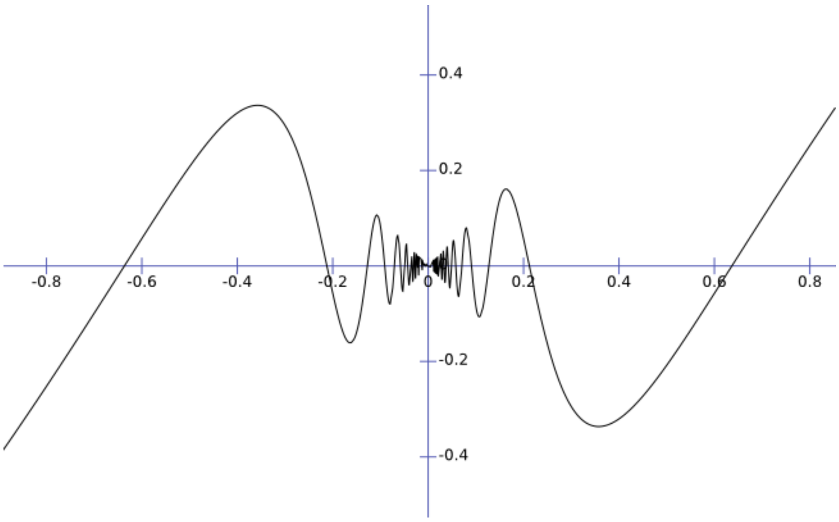

Figura 3.1: Gráfica de la función (3.1).

- Sea f función derivable con f' acotada; entonces f es de variación acotada.

Demostración. Como f' está acotada, tenemos $|f'(x)| \leq K$ para todo $x \in (a,b)$, $K \geq 0$.
Sea $P \equiv \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ una partición de $[a,b]$. Por el teorema del valor medio existe $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tal que

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(c_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Por tanto:

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |f'(c_k)||(x_k - x_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{n} K|(x_k - x_{k-1})| = K\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = K(b-a).$$

Por tanto, f es de variación acotada. □

Proposición 3.1. *Sean f y g de variación acotada en $[a,b]$ y $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Entonces, $\lambda f+\mu g$ y fg son de variación acotada en $[a,b]$.*

Demostración.

- $\lambda f+\mu g$ es de variación acotada en $[a,b]$:

  Sea $P \equiv \{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ una partición del intervalo $[a,b]$. Entonces:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|(\lambda f+\mu g)(x_k)-(\lambda f+\mu g)(x_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{n}|\lambda f(x_k)+\mu g(x_k)-\lambda f(x_{k-1})-\mu g(x_{k-1})| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n}|\lambda(f(x_k)-f(x_{k-1}))|+|\mu(g(x_k)-g(x_{k-1}))| \\ &\leq |\lambda|V_a^b(f)+|\mu|V_a^b(g).\end{aligned}$$

  Por tanto, $\lambda f+\mu g$ es de variación acotada en $[a,b]$.

- fg es de variación acotada en $[a,b]$:

  Como toda función de variación acotada es acotada, tenemos $|f(x)|\leq A$ y $|g(x)|\leq B$. Sea $h=fg$, entonces

$$h(x_k)-h(x_{k-1})=f(x_k)g(x_k)-f(x_{k-1})g(x_{k-1})=f(x_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]+g(x_{k-1})[f(x_k)-f(x_{k-1})].$$

  Por tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|h(x_k)-h(x_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{n}|f(x_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]+g(x_{k-1})[f(x_k)-f(x_{k-1})]| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n}|f(x_k)||g(x_k)-g(x_{k-1})|+\sum_{k=1}^{n}|g(x_{k-1})||f(x_k)-f(x_{k-1})| \\ &= AV_a^b(g)+BV_a^b(f).\end{aligned}$$

  Por tanto, fg es de variación acotada en $[a,b]$. □

Lema 3.2. *Sea f de variación acotada en $[a,b]$.*

(a) Si $a\leq c\leq b$, entonces f es de variación acotada en cada intervalo $[a,c]$ y $[c,b]$. Además, $V_a^b(f)=V_a^c(f)+V_c^b(f)$.

(b) La función $x\longmapsto V_a^x(f)$ es monótona creciente en $[a,b]$.

Demostración. (a) Sea $c\in(a,b)$. Veamos que f es de variación acotada en $[a,c]$.

Sea $P'\equiv\{a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}=c\}$ una partición arbitraria de $[a,c]$. Entonces $P\equiv\{a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}=c<x_n=b\}$ es una partición de $[a,b]$. Tenemos:

$$\sum_{k=1}^{n-1}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|-|f(x_n)-f(x_{n-1})|\leq V_a^b(f,P)-|f(b)-f(c)|.$$

Por tanto, $V_a^c(f,P')\leq V_a^b(f,P)-|f(b)-f(c)|$. Es decir, f es de variación acotada en $[a,c]$.

Para ver que f es de variación acotada en $[c,b]$ seguir un procedimiento análogo.

Nos falta probar que $V_a^b(f)=V_a^c(f)+V_c^b(f)$. Es trivial que $V_a^a(f)=0$, luego podemos suponer que $a<c<b$. Sea $\varepsilon>0$. Entonces, existe $P\equiv\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ tal que

$$V_a^b(f)-\varepsilon<\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $c = x_i$ para algún i. Se tiene:

$$V_a^b(f) - \varepsilon < \sum_{k=1}^{i} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=i+1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Luego, $V_a^b(f) - \varepsilon < V_a^c(f) + V_c^b(f)$.

Ahora sean $P_1 \equiv \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = c\}$ una partición cualquiera de $[a,c]$ y $P_2 \equiv \{c = x_m < x_{m+1} < \ldots < x_n\}$ una partición cualquiera de $[c,b]$. Entonces, $P_1 \cup P_2$ es una partición de $[a,b]$. Luego,

$$\sum_{k=1}^{m} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=m+1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq V_a^b(f).$$

Tomando supremos en las particiones de $[a,c]$ y $[c,b]$ se tiene $V_a^c(f) + V_c^b(f) \leq V_a^b(f)$.

Por tanto, $V_a^b(f) - \varepsilon < V_a^c(f) + V_c^b(f) \leq V_a^b(f)$, y como ε arbitrario, podemos hacer que $\varepsilon \to 0$, y así $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$.

(b) Veamos que la función $x \longmapsto V_a^x(f)$ es monótona creciente en $[a,b]$:

Sean $x_1, x_2 \in [a,b]$ tal que $x_1 < x_2$. Por el apartado (a), $V_a^{x_2}(f) = V_a^{x_1}(f) + V_{x_1}^{x_2}(f) \geq V_a^{x_1}(f)$. □

Ahora, estamos en disposición de enunciar y demostrar el resultado principal del capítulo, *la descomposición de Jordan*. Este teorema es una caracterización muy importante de funciones de variación acotada.

Teorema 3.3. ***(Descomposición de Jordan.)*** *Una función f es de variación acotada en $[a,b]$ si y solo si es la diferencia de dos funciones monótonas crecientes en $[a,b]$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea f de variación acotada en $[a,b]$ y $V_a^x(f)$ la variación total de f con $x \in (a,b]$ y $V_a^a(f) = 0$. Tenemos que $f(x) = V_a^x(f) - [V_a^x(f) - f(x)]$, para todo $x \in [a,b]$.

La función $V_a^x(f)$ es creciente por el lema 3.2. Basta ver que $V_a^x(f) - f(x)$ también lo es.

Sean $x_1, x_2 \in (a,b]$ tales que $x_1 < x_2$. Por el lema 3.2, $V_a^{x_2}(f) - V_a^{x_1}(f) = V_{x_1}^{x_2}(f)$; y por la definición de variación total, $V_{x_1}^{x_2}(f) \geq |f(x_2) - f(x_1)| \geq f(x_2) - f(x_1)$.

Por tanto, $V_a^{x_2}(f) - V_a^{x_1}(f) \geq f(x_2) - f(x_1)$, lo que implica $V_a^{x_2}(f) - f(x_2) \geq V_a^{x_1}(f) - f(x_1)$, y así $V_a^x(f) - f(x)$ es una función monótona creciente en $[a,b]$.

$\Leftarrow$) Sean g, h funciones monótonas crecientes en $[a,b]$ tales que $f = g - h$. Tenemos que g y h son de variación acotada, y por la proposición 3.1, $f = g - h$ es de variación acotada. □

Esta descomposición no es única. Por ejemplo, sea $f = g - h$, con g y h monótonas crecientes, y sea p monótona creciente; podemos representar f como $f = g - h = (g + p) - (h + p)$.

Corolario 3.4. *El conjunto de discontinuidades de una función de variación acotada es, a lo sumo, contable.*

Gracias al teorema 3.3, podemos generalizar el teorema de Lebesgue 2.10, como un corolario de esta descomposición:

Corolario 3.5. *Toda función de variación acotada es derivable en casi todo punto.*

Esto nos genera una nueva cuestión, ¿la derivada de f, f', es integrable en $[a,b]$? Vamos a intentar contestarla con los siguientes enunciados.

Para ello recordamos el *Lema de Fatou*, que dice que *si (f_n) es una sucesión de funciones no negativas en la clase L que converge en c.t.p. a f y $\int_a^b f_n(x)\,dx \leq A$ para todo n, entonces $f \in L$ y $\int_a^b f(x)\,dx \leq A$.*

Proposición 3.6. *Si f es una función monótona creciente en $[a,b]$, entonces la derivada f' es integrable y*

$$\int_a^b f'(x)\, dx \leq f(b) - f(a). \tag{3.2}$$

Demostración. Extendemos f al intervalo $[a, b+1]$ de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} f & a \leq x \leq b, \\ f(b) & b < x \leq b+1. \end{cases}$$

Sea $f_n(x) = n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right]$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [a,b]$. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x),$$

para casi todo punto de $[a,b]$. Como f es integrable, cada $f_n(x)$ es integrable. Además, como f es creciente, $f_n(x) \geq 0$.

Integramos:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_n(x)\, \mathrm{d}x &= \int_a^b n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right] \mathrm{d}x = n\left[\int_a^b f\left(x+\frac{1}{n}\right) \mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x\right] \\
&= n\left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)\, \mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x\right] = n\left[\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\, \mathrm{d}x - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\, \mathrm{d}x\right] \\
&= n\left[\frac{1}{n} f(b) - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\, \mathrm{d}x\right] \leq n\left[\frac{1}{n} f(b) - \frac{1}{n} f(a)\right] = f(b) - f(a).
\end{aligned}$$

Así, por el *Lema de Fatou*, tenemos que f' es integrable y

$$\int_a^b f'(x)\, \mathrm{d}x \leq f(b) - f(a).$$

□

Corolario 3.7. *Si f es de variación acotada en $[a,b]$, entonces la derivada f' es integrable en $[a,b]$.*

La desigualdad (3.2) en la proposición 3.6 puede ser estricta. Un ejemplo de este resultado es la función singular de Cantor-Lebesgue. La presentamos como límite de una sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to [0,1]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ definida del siguiente modo:

- $f_0(x) = x$, para $x \in [0,1]$,
- $f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_n(3x) & x \in [0, \frac{1}{3}], \\ \frac{1}{2} & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ \frac{1}{2} f_n(3x-2) + \frac{1}{2} & x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$

Dicho en palabras, f_n es la función obtenida interpolando linealmente los valores

$$f_n(0) = 0,\ f_n(1) = 1,\ f_n(x) = \frac{k}{2^n} \text{ en el intervalo } J_n^k \text{ y en sus extremos,}$$

siendo J_n^k el k-ésimo intervalo eliminado, de izquierda a derecha, en la n-ésima iteración de la construcción del conjunto de Cantor (descrito en el capítulo 1).

Se pueden ver en la figura 3.2 los tres primeros términos de la sucesión de funciones (f_n).

Esta sucesión converge a una función (continua) f denominada función de Cantor-Lebesgue. Es una función singular sobre $[0,1]$, tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f'(x) = 0$ en c.t.p. Por tanto, sustituyendo en (3.2), tenemos

$$0 = \int_0^1 f'(x)\, \mathrm{d}x < f(1) - f(0) = 1.$$

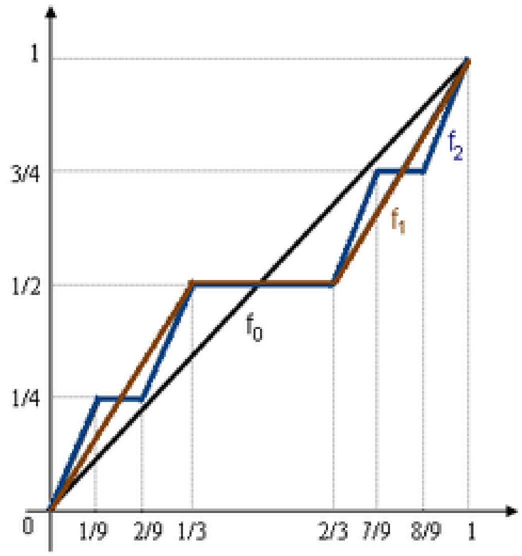

Figura 3.2: Gráfica de f_0, f_1 y f_2.

Para terminar con esta sección, mostramos una proposición sobre la integral definida al comienzo del capítulo anterior. Usamos para ello la siguiente propiedad de la integral:

Proposición 3.8. *Si f es integrable en $[a,b]$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $B \subseteq [a,b]$ es medible y $m(B) < \delta$, entonces*

$$\left| \int_B f(t)\, dt \right| < \varepsilon.$$

Proposición 3.9. *Si f es integrable en $[a,b]$, entonces la integral*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

es uniformemente continua y de variación acotada en $[a,b]$.

Demostración. Para $a \leq x \leq y \leq b$ tenemos

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)\, \mathrm{d}t \right|.$$

Por la proposición 3.8, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|y - x| < \delta$ implica que $|F(y) - F(x)| < \varepsilon$. Por tanto, F es uniformemente continua en $[a,b]$.

Sea $f = f^+ - f^-$, con $f^+ = \text{máx}\{f, 0\}$ y $f^- = \text{máx}\{-f, 0\}$. Se puede probar que f^+ y f^- son integrables, luego $\int_a^x f^+(t)\, \mathrm{d}t$ y $\int_a^x f^-(t)\, \mathrm{d}t$ son monótonas crecientes. Como

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^x f^+(t)\, \mathrm{d}t \; - \; \int_a^x f^-(t)\, \mathrm{d}t,$$

es diferencia de dos funciones monótonas crecientes, por la descomposición de Jordan, 3.3, tenemos que F es de variación acotada. $\square$

3.2. Funciones absolutamente continuas.

En esta sección introducimos una nueva clase de funciones que son claves para clarificar la relación entre derivación e integración en el sentido de Lebesgue.

Queremos caracterizar una clase de funciones que satisfagan la relación fundamenteal

$$\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(a). \tag{3.3}$$

En secciones anteriores hemos visto que para una función continua y monótona creciente en $[a,b]$ no es cierta necesariamente la igualdad (3.3).

Debemos imponer condiciones más fuertes que continuidad y variación acotada.

Definición 16. Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice *absolutamente continua* si para algún $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda colección finita de intervalos disjuntos $(a_k,b_k) \subset [a,b]$, $k = 1,2,\ldots,n$ con $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$, se tiene $\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

Claramente, toda función absolutamente continua es uniformemente continua; sin embargo, hay funciones uniformemente continuas que no son absolutamente continuas. Por ejemplo, la *función singular de Cantor-Lebesgue*, enunciada en la sección anterior, es uniformemente continua, pero no absolutamente continua.

Proposición 3.10. *Si f es absolutamente continua en $[a,b]$, entonces αf es absolutamente continua en $[a,b]$, para α constante. Además, si f y g son absolutamente continuas en $[a,b]$, entonces $f+g$ y fg son absolutamente continuas en $[a,b]$.*

Proposición 3.11. *Si f absolutamente continua en $[a,b]$, entonces f es de variación acotada en $[a,b]$.*

Demostración. Para $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que para toda colección finita de intervalos disjuntos $(a_k,b_k) \subset [a,b]$, $k = 1,2,\ldots,n$, con $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$, se tiene $\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < 1$.

Por lo tanto si $[c,d]$ es un subintervalo de $[a,b]$ de longitud menor que δ, tenemos $V_c^d(f) < 1$.

Sea $P \equiv \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b\}$ una partición de $[a,b]$ tal que $x_k - x_{k-1} < \delta$, para todo $k = 1,2,\ldots,N$. Entonces, $V_a^b(f) = \sum_{k=1}^{N} V_{x_{k-1}}^{x_k}(f) \le N < \infty$.

Por tanto, f es de variación acotada en $[a,b]$. □

Esta proposición implica la existencia de funciones continuas que no son absolutamente continuas, como, por ejemplo, la función descrita en (3.1).

Vamos a dar una caracterización de estas funciones que nos servirá de ayuda en las demostraciones del siguiente capítulo, las cuales nos llevarán al objetivo final del trabajo.

Proposición 3.12. *Toda función absolutamente continua en $[a,b]$ es la diferencia de dos funciones monótonas crecientes absolutamente continuas en $[a,b]$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea f absolutamente continua. Por la descomposición de Jordan 3.3, tenemos $f(x) = V_a^x(f) - [V_a^x(f) - f(x)]$, con $V_a^x(f)$ creciente. Por 3.10 nos basta con demostrar que $V_a^x(f)$ es absolutamente continua en $[a,b]$.

Dado $\varepsilon > 0$, sea γ tal que $0 < \gamma < \varepsilon$. Como f absolutamente continua, correspondiente a γ, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier colección finita de intervalos mutuamente disjuntos $(a_k,b_k) \subset [a,b]$ de longitud total $< \delta$, tenemos $\sum_{k=1}^{n}|f(a_k) - f(b_k)| < \gamma$. Entonces, $\sum_{k=1}^{n} V_{a_k}^{b_k}(f) = \sum_{k=1}^{n}|V_a^{a_k}(f) - V_a^{b_k}(f)|$ es el supremo de

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n_k}|f(x_{k,j}) - f(x_{k,j-1})|\right) \tag{3.4}$$

para una partición arbitraria $\{a_k = x_{k,0} < x_{k,1} < \ldots < x_{k,n_k} = b_k\}$ del intervalo $[a_k,b_k]$. Como la longitud de los intervalos $[x_{k,j-1},x_{k,j}]$ es $< \delta$, por (3.4) es $< \gamma$, ya que f es absolutamente continua. Luego, el supremo, $\sum_{k=1}^{n} V_{a_k}^{b_k}(f) = \sum_{k=1}^{n}|V_a^{a_k}(f) - V_a^{b_k}(f)| \le \gamma < \varepsilon$.

Así, f absolutamente continua y por tanto $V_a^b(f) - f(x)$ absolutamente continua.

$\Leftarrow$) Sea $f = g - h$ con g y h funciones monótonas crecientes absolutamente continuas en $[a,b]$. Por la proposición 3.10 tenemos que f es una función absolutamente continua en $[a,b]$. □

Con lo visto hasta ahora, podemos decir algo más sobre una función absolutamente continua.

Proposición 3.13. *Sea f absolutamente continua en $[a,b]$, entonces f es derivable en c.t.p. de $[a,b]$ y f' es integrable en c.t.p. de $[a,b]$.*

Demostración. Por la proposición 3.11 tenemos que f es de variación acotada, y así, por los corolarios 3.5 y 3.7, tenemos que f es derivable en c.t.p. y su derivada f' es integrable en c.t.p. de $[a,b]$. □

El resto de esta sección lo vamos a dedicar a dar algunas propiedades interesantes sobre las funciones absolutamente continuas.

En general, una función continua no tiene porque llevar conjuntos medibles a medibles. Ahora, vamos a ver que la propiedad de medir conjuntos si que es invariante bajo una función absolutamente continua.

Proposición 3.14. *Una función absolutamente continua lleva conjuntos de medida nula en conjuntos de medida nula.*

Demostración. Sea f absolutamente continua en $[a,b]$, sea $E \subset [a,b]$ tal que $m(E) = 0$. Podemos asumir que $E \subset (a,b)$.

Para $\varepsilon > 0$ arbitrario, podemos encontrar $\delta > 0$ y una sucesión de intervalos disjuntos dos a dos (a_k,b_k) cubriendo E tal que $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < \delta$ y $\sum_{k=1}^{\infty}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

Como f es continua, existen $\alpha_k, \beta_k \in [a_k,b_k]$ tales que $f(\alpha_k) = m_k$ y $f(\beta_k) = M_k$, siendo mínimo y máximo, respectivamente, de f en $[a_k,b_k]$.

Entonces, $\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_k - \alpha_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < \delta$. Así, $\sum_{k=1}^{\infty}(M_k - m_k) < \varepsilon$.

También, $f(E) \subset \cup_{k=1}^{\infty} f[(a_k,b_k)] \subset \cup_{k=1}^{\infty}(m_k,M_k)$. Por tanto, $f(E)$ es de medida nula. □

Proposición 3.15. *Una función absolutamente continua lleva conjuntos medibles en conjuntos medibles.*

Demostración. Sea A medible en $[a,b]$, luego existe (F_n) sucesión creciente de conjuntos cerrados contenidos en A tal que $m(A) = \lim_{n\to\infty} m(F_n)$. Tenemos $A = (\cup_{n=1}^{\infty}F_n) \cup N$, siendo N de medida nula. Luego, $f(A) = f\left((\cup_{n=1}^{\infty}F_n) \cup N\right) = f\left(\cup_{n=1}^{\infty}F_n\right) \cup f(N) = (\cup_{n=1}^{\infty}f(F_n)) \cup f(N)$.

Por la proposición 3.14, $f(N)$ es de medida nula. También, f es continua, y la imagen de un compacto bajo una función continua es también un compacto, por tanto $f(F_n)$ es compacto, lo que implica $f(F_n)$ medible, y como la unión de medibles es medible, tenemos que $f(A)$ es medible. □

Corolario 3.16. *Una función continua lleva conjuntos medibles en conjuntos medibles si y solo si lleva conjuntos de medida nula en conjuntos de medida nula.*

Con este último teorema, podemos relacionar varios conceptos que sabemos hasta ahora.

Teorema 3.17. *Una función continua de variación acotada es absolutamente continua si y solo si lleva conjuntos medibles en conjuntos medibles.*

Capítulo 4

Teoremas fundamentales del cálculo.

Llegados a este punto, estamos listos para afrontar y demostrar los teoremas fundamentales del cálculo para la integral de Lebesgue.

Los resultados de este capítulo se pueden ver en [3, pp. 184–190].

4.1. Primer teorema fundamental del cálculo.

Enuciamos algunas proposiciones, que nos serán de ayuda para la demostración del primer teorema fundamental del cálculo.

Proposición 4.1. *Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable si y solo si la función $|f|$ es integrable. En este caso, tenemos que*

$$\left|\int_a^x f(t)\ dt\right| \le \int_a^x |f(t)|\ dt.$$

Proposición 4.2. *Sea f integrable en $[a,b]$ y $\varepsilon > 0$. Entonces, existe una función continua g tal que $\int_a^b |f(x) - g(x)|\ dx < \varepsilon$.*

Teorema 4.3. ***(Primer teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue.)*** *Si f es integrable en $[a,b]$, entonces la integral*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt \tag{4.1}$$

es absolutamente continua en $[a,b]$ y $F'(x) = f(x)$ en c.t.p. de $[a,b]$.

Demostración. Vamos por partes:

- Comenzamos demostrando la continuidad absoluta de $F(x)$:

  Por la proposición 4.2, dado $\varepsilon > 0$ existe una función g continua en $[a,b]$ tal que $\int_a^b |f(t) - g(t)|\ \mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $M = \sup|g(t)|$ en $[a,b]$ y $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$.

  Sea una colección finita de intervalos disjuntos $(a_k, b_k) \subset [a,b]$, $k = 1,2,\dots,n$, con $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ y denotamos $E = \cup_{k=1}^n (a_k, b_k)$. Se tiene $m(E) < \delta$. Por la proposición 4.1 se sigue que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| &= \sum_{k=1}^n \left|\int_{a_k}^{b_k} f(t)\ \mathrm{d}t\right| \le \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} |f(t)|\ \mathrm{d}t = \int_E |f(t)|\ \mathrm{d}t \\ &\le \int_E |f(t) - g(t)|\ \mathrm{d}t + \int_E |g(t)|\ \mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2} + Mm(E) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M\varepsilon}{2M} = \varepsilon.\end{aligned}$$

  Por tanto, $F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ es absolutamente continua.

- Ahora veremos que $F'(x) = f(x)$ para c.t.p. $x \in [a,b]$:

  Como F absolutamente continua en $[a,b]$, por la proposición 3.13, F es derivable en c.t.p. de $[a,b]$ y F' es integrable en c.t.p. de $[a,b]$.

  Comenzamos probando que $F'(x) \leq f(x)$ para c.t.p. $x \in [a,b]$.

  Sea $E = \{x \in [a,b] : \exists\, F'(x), F'(x) > f(x)\}$. Sean p, q racionales tal que $p < q$ y $E_{pq} = \{x \in [a,b] : \exists\, F'(x),\, f(x) < p < q < F'(x)\}$, claramente $E = \cup_{p,q} E_{pq}$.

  Ahora, veamos que cada E_{pq} tiene medida nula. Como tenemos que f y F' son integrables; en particular, f y F' son medibles, luego E_{pq} es medible.

  Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ que cumpla la proposición 3.8.

  Existe un conjunto abierto G tal que $E_{pq} \subset G$ y $m(G) - m(E_{pq}) < \delta$. Como G abierto, $G = \cup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ con (a_n, b_n) intervalos disjuntos dos a dos. Para cada n, denotamos $G_n = E_{pq} \cap (a_n, b_n)$. Cada $G_n \subset \{x \in (a_n, b_n) : F'(x) = D^+F(x) > q\}$.

  Vamos a tomar de referencia la demostración del *lema del sol naciente*, 2.4, vista en el capítulo 2.

  Sea $x_0 \in G_n$, entonces existe $\xi > x_0$ tal que $\frac{F(\xi)-F(x_0)}{\xi - x_0} > q$.

  Despejando obtenemos $F(\xi) - q\xi > F(x_0) - qx_0$, que nos dice que x_0 es punto sombra de la función $F(x) - qx$ con respecto a la salida del sol. Por el lema 2.4, podemos cubrir G_n por una sucesión de intervalos disjuntos $(a_{n,k}, b_{n,k}) \subset (a_n, b_n)$ tal que

  $$q(b_{n,k} - a_{n,k}) \leq F(b_{n,k}) - F(a_{n,k}) = \int_{a_{n,k}}^{b_{n,k}} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

  Por tanto,

  $$qm(G_n) = q\sum_{k=1}^{\infty}(b_{n,k} - a_{n,k}) = \sum_{k=1}^{\infty} q(b_{n,k} - a_{n,k}) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\int_{a_{n,k}}^{b_{n,k}} f(t)\, \mathrm{d}t = \int_{S_n} f(t)\, \mathrm{d}t,$$

  donde $S_n = \cup_{k=1}^{\infty}(a_{n,k}, b_{n,k})$. Los conjuntos S_n son disjuntos dos a dos, pues $(a_{n,k}, b_{n,k}) \subset (a_n, b_n)$, y estos son disjuntos. Sea $S = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$. Tenemos $E_{pq} \subset S \subset G$.

  - $G_n \subseteq S_n$ para cada n, luego $E_{pq} = E_{pq} \cap G = \cup_{n=1}^{\infty} G_n \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} S_n = S$.
  - $(a_{n,k}, b_{n,k}) \subseteq (a_n, b_n) \subseteq G$, luego $S_n \subseteq G$ para todo n y $S \subseteq G$.

  Y, también, $m(S \setminus E_{pq}) < \delta$. Luego, por la proposición 3.8, $\left|\int_{S\setminus E_{pq}} f(t)\, \mathrm{d}t\right| < \varepsilon$.

  Ahora,

  $$qm(E_{pq}) = q\sum_{n=1}^{\infty} m(G_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\int_{S_n} f(t)\, \mathrm{d}t = \int_S f(t)\, \mathrm{d}t = \int_{E_{pq}} f(t)\, \mathrm{d}t + \int_{S\setminus E_{pq}} f(t)\, \mathrm{d}t < pm(E_{pq}) + \varepsilon.$$

  Por tanto, $m(E_{pq}) < \frac{\varepsilon}{q-p}$; ε arbitrario. Luego, E_{pq} tiene medida nula; y, por tanto, E tiene medida nula.

  Así concluimos que $F'(x) \leq f(x)$ para c.t.p. $x \in [a,b]$.

  Asimismo, podemos tomar $h(x) = -f(x)$ y $H(x) = \int_a^x h(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^x -f(t)\, \mathrm{d}t = -F(x)$ su integral, y aplicar la desigualdad que acabamos de probar a la función h. Así, $-F'(x) = H'(x) \leq h(x) = -f(x)$. Luego $F'(x) \geq f(x)$ para c.t.p. $x \in [a,b]$ y tenemos la igualdad. □

Este teorema será de utilidad para poder demostrar el teorema principal de la siguiente sección.

4.2. Segundo teorema fundamental del cálculo.

Necesitamos unos lemas previos para llegar a concluir el objetivo de nuestro capítulo, y, en general, del trabajo completo.

Lema 4.4. *Sea f absolutamente continua monótona creciente en $[a,b]$ y $f'(x) = 0$ en c.t.p. $x \in [a,b]$, entonces f es una constante.*

Demostración. Como f es continua y monótona creciente, su imagen será el intervalo cerrado $[f(a), f(b)]$. Queremos ver que f es una constante, entonces nos basta con ver que el intervalo $[f(a), f(b)]$ tiene medida nula.

Sea $E = \{x \in [a,b) : f'(x) = 0\}$ y $S = [a,b] \backslash E$. Por hipótesis tenemos que $m(E) = b - a$ y $m(S) = 0$. Y también sabemos que $f([a,b]) = [f(a), f(b)] = f(E) \cup f(S)$.

Por la proposición 3.14, tenemos que $m(f(S)) = 0$. Nos falta ver que $m(f(E)) = 0$.

Sea $x_0 \in E$, entonces $f'(x_0) = 0$, por tanto existe $\xi > x_0$ tal que $\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} < \varepsilon$. Esto implica que $\varepsilon\xi - f(\xi) > \varepsilon x_0 - f(x_0)$ y por tanto x_0 es punto sombra de la función $\varepsilon x - f(x)$ con respecto a la salida del sol.

Por el teorema 2.4, E se puede cubrir por una sucesión de intervalos abiertos disjuntos $(a_k, b_k) \subset (a,b)$ tal que $\varepsilon a_k - f(a_k) \leq \varepsilon b_k - f(b_k)$. Así, $f(b_k) - f(a_k) \leq \varepsilon(b_k - a_k)$.

Sumando todos los intervalos, $\sum_{k=1}^{\infty} (f(b_k) - f(a_k)) \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) = \varepsilon(b - a)$.

Por tanto, $f(E)$ se puede cubrir por intervalos contables, de longitud total arbitrariamente pequeña, es decir, $f(E)$ tiene medida nula, y por tanto f es una constante. □

Corolario 4.5. *Sea f una función absolutamente continua monótona creciente en $[a,b]$, entonces el conjunto $f(\{x \in [a,b] : f'(x) = 0\})$ tiene medida nula.*

Este corolario implica que la función singular de Cantor-Lebesgue descrita en el capítulo anterior no es absolutamente continua.

Ahora sí, podemos enunciar y demostrar el segundo teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue.

Teorema 4.6. ***(Segundo teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue.)*** *Sea f una función absolutamente continua en $[a,b]$, entonces f' es integrable en $[a,b]$ y*

$$\int_a^x f'(t)\, dt = f(x) - f(a), \quad \textit{para todo } x \in [a,b]. \tag{4.2}$$

Demostración. Es suficiente demostrar que se cumple para una función f absolutamente continua monótona creciente, ya que por la proposición 3.12, una función absolutamente continua es la diferencia de dos funciones absolutamente continuas monótonas crecientes.

Sea f una función absolutamente continua y monótona creciente, por la proposición 3.6, f' es integrable y $\int_a^x f'(t)\, \mathrm{d}t \leq f(x) - f(a)$ para todo $x \in [a,b]$.

Sea $g(x) = f(x) - \int_a^x f'(t)\, \mathrm{d}t$. Tenemos que g es la diferencia de f, que es absolutamente continua y por el *primer teorema fundamental del cálculo* 4.3, $\int_a^x f'(t)\, \mathrm{d}t$ es absolutamente continua; es decir, g es la diferencia de dos funciones absolutamente continuas. Luego, por la proposición 3.12, g es absolutamente continua. Notar que $g(a) = f(a)$.

Sean x_1, x_2 tal que $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Tenemos:

$$g(x_2) - g(x_1) = f(x_2) - \int_a^{x_2} f'(t)\, \mathrm{d}t - \left[f(x_1) - \int_a^{x_1} f'(t)\, \mathrm{d}t \right] = f(x_2) - f(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} f'(t)\, \mathrm{d}t. \tag{4.3}$$

Por la proposición 3.6, $f(x_2) - f(x_1) \geq \int_{x_1}^{x_2} f'(t)\, \mathrm{d}t$. Por tanto, (4.3) quedará:

$$g(x_2) - g(x_1) \geq f(x_2) - f(x_1) - [f(x_2) - f(x_1)] = 0.$$

Por consiguiente, g es monótona creciente.

Como $g(x) = f(x) - \int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t$, siendo ambas funciones absolutamente continuas, volviendo a aplicar el *primer teorema fundamental* 4.3 $g'(x) = f'(x) - f'(x) = 0$ c.t.p. Ahora, por el lema 4.4, g es una constante, cuyo valor es $g(x) = g(a) = f(a)$.

Por tanto, $f(a) = f(x) - \int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t$, para todo $x \in [a,b]$. □

Así, podemos dar por finalizado el estudio sobre los teoremas fundamentales del cálculo para la Integral de Lebesgue, pero antes de concluir la investigación, se enunciarán unos corolarios de este teorema también muy útiles en integración.

Corolario 4.7. *Toda función absolutamente continua en $[a,b]$ se puede representar de la forma*

$$f(x) = \int_a^x g(t)\ dt + C,$$

siendo g una función integrable en $[a,b]$ y C una constante.

En este segundo corolario, reenunciamos el lema 4.4 para cualquier función absolutamente continua:

Corolario 4.8. *Sea f función absolutamente continua en $[a,b]$ y $f'(x) = 0$ en c.t.p. $x \in [a,b]$, entonces f es una constante.*

Demostración. Por el *segundo teorema fundamental* 4.6, f' integrable y $\int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t = f(x) - f(a)$. Como $f'(x) = 0$ en c.t.p. $x \in [a,b]$, tenemos que $0 = \int_a^x 0\ \mathrm{d}t = f(x) - f(a)$ para todo $x \in [a,b]$.

Luego, $f(x) = f(a)$ y así f constante. □

Ahora sí, damos por concluido el estudio teórico de los teoremas fundamentales del cálculo para la Integral de Lebesgue. Para finalizar el capítulo, y por consiguiente el trabajo, vamos a mostrar una aplicación de estos teoremas, denominada *Integración por partes*, un resultado significativo en teoría de la medida y la integración:

Proposición 4.9. ***(Integración por partes.)*** *Suponer F absolutamente continua y g integrable en $[a,b]$. Sea $f(x) = F'(x)$ en c.t.p. de $[a,b]$ y sea $G(x) = \int_a^x g(t)\ dt$. Entonces, Fg y fG son integrables en $[a,b]$ y*

$$\int_a^b F(t)g(t)\ dt + \int_a^b f(t)G(t)\ dt = F(b)G(b) - F(a)G(a). \tag{4.4}$$

Demostración. Tenemos F absolutamente continua; por el *segundo teorema fundamental* 4.6, $F' = f$ integrable y $\int_a^x F'(t)\ \mathrm{d}t = F(x) - F(a)$. También, tenemos $G(x) = \int_a^x g(t)\ \mathrm{d}t$ y g integrable; por el *primer teorema fundamental* 4.3, G absolutamente continua y $G'(x) = g(x)$ en c.t.p. de $[a,b]$.

Por la proposición 3.10, FG es absolutamente continua, y aplicando de nuevo el teorema 4.6, resulta que $(FG)'$ integrable y

$$\int_a^b (FG)'(t)\ \mathrm{d}t = (FG)(b) - (FG)(a) = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Derivando tenemos que $(FG)'(t) = F'(t)G(t) + F(t)G'(t) = f(t)G(t) + F(t)g(t)$ en c.t.p. $t \in [a,b]$.

Por último, F y G son de variación acotada por la proposición 3.11 y por tanto, acotadas; también se tiene f y g funciones integrables, por tanto, fG y Fg son integrables. Así,

$$\int_a^b F(t)g(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^b f(t)G(t)\ \mathrm{d}t = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$ □

Bibliografía

[1] J. L. ARREGUI, J. BERNUÉS, B. CUARTERO Y M. PÉREZ, *Teoría de funciones de una variable real*, Universidad de Zaragoza, 2009.

[2] J. BERNUÉS, *Apuntes de Integral de Lebesgue*, Universidad de Zaragoza, Departamento de Matemáticas, 2017.

[3] S. B. CHAE, *Lebesgue integration*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1995.

[4] J. J. DÓNIZ LABRADOR, *Funciones raras en análisis real*, Universidad de La Laguna, Facultad de Ciencias, Sección de Matemáticas, 2017. `http://riull.ull.es/xmlui/handle/915/6198`.

[5] E. HUGUES GALINDO, *Dos alternativas a la integral de Riemann: la integral B-Riemann y la integral de Lebesgue*, Universidad de Sonora, Departamento de Matemáticas, 1985, `http://lic.mat.uson.mx/tesis/25TesisHugues.PDF`.

[6] E. P. LOZANO ERAZO, *Construcción pormenorizada de la función de Kolmogórov cuya serie de Fourier diverge en casi todas partes*, Universidad Central del Ecuador, Facultad de ingeniería, Ciencias Físicas y Matemática, 2017, `http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/25000/13139`.

[7] J. L. NAVARRO, *Topología General*, Universidad de Zaragoza, Departamento de Matemáticas, 2015.

[8] F. REVILLA, *Funciones de variación acotada*, 2016. `http://fernandorevilla.es/blog/2016/01/19/funciones-de-variacion-acotada/`.

[9] J. H. WILLIAMSON, *Integración Lebesgue*, Tecnos, Madrid, 1973.